Métodos topológicos en el análisis no lineal

Clase 15 - 28/10 (versión preliminar)

1 Entre bueyes no hay cornadas (pero sí puntos críticos)

En la clase anterior mencionamos el problema isoperimétrico, que tuvo su origen en la pelea entre Dido y Pigmalión, tal como se cuenta en el tango que dice: hermano, yo no quiero rebajarme... Hay que decir, en favor de Dido, que no siempre las disputas entre hermanos permiten fundar cosas tan importantes como Cartago y -de paso- el cálculo variacional. Aunque Virgilio, claro, olvidó mencionar este último detalle:

Se van por el mar las riquezas del avaro Pigmalión; una mujer dirige la empresa. Llegaron a estos lugares, donde ahora de enormes murallas y nace el alcázar de una joven Cartago, y compraron el suelo, que por esto llamaron Birsa, cuanto pudieron rodear con una piel de toro.

Tal vez llame la atención que Virgilio se refiera a un toro y no a un buey, aunque no vale la pena detenernos en analizar las diferencias entre un bovino y otro, especialmente si hay personas impresionables entre los lectores. Pero dejemos de hablar de toros o bueyes perdidos (mejor dicho, cortajeados) y digamos, de una vez, que el problema isoperimétrico es un caso particular de la siguiente situación: encontrar un extremo u de cierta funcional I ligado a la condición $J(u) = 0$, donde J es otra funcional. Y para eso están, como decía Dido a los amigos de su círculo íntimo (nunca más literal), los multiplicadores de Lagrange.

Es interesante ver esto desde el punto de vista geométrico; para eso, en primer lugar, podemos pensar en la hipersuperficie de un espacio de Banach X definida implícitamente en la forma

$$S := \{x \in A : F(x) = 0\},$$

donde $A \subset X$ es abierto y $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 . Para que se trate de una superficie regular en cierto $x_0 \in S$, debemos pedir justamente que x_0 sea (¡vaya coincidencia!) un punto regular, es decir, que $DF(x_0)$ sea suryectiva. Los vectores tangentes a S en x_0 son aquellos $v \in X$ tales que existe una curva suave $c : (-\delta, \delta) \rightarrow S$ con $c(0) = x_0$ y $c'(0) = v$. Esto permite definir el espacio tangente $T_{x_0}S$ como el conjunto de todos los vectores tangentes a S en x_0 , sin

que quede claro, en principio, qué pinta tiene eso. En $\mathbb{R}^n$ a uno le dicen que el espacio tangente a la superficie es $\nabla F(x_0)^\perp$, aunque esto recién se entiende un poco después, gracias a -ni más ni menos- el teorema de la función implícita. En el caso de un espacio de Banach cualquiera no se puede hablar de “gradiente” (aunque sí, por ejemplo, en un espacio de Hilbert); de todas formas, el resultado es el mismo: $T_{x_0}S = \ker(DF(x_0))$.

Una cosa es clara, si v es un vector tangente, entonces $DF(x_0)(v) = 0$, por regla de la cadena. En efecto, si c es como antes, entonces $F \circ c = 0$ y vale

$$0 = (F \circ c)'(0) = DF(x_0)(c'(0)) = DF(x_0)(v).$$

La parte más complicada consiste en probar que todo vector del núcleo de $DF(x_0)$ es la derivada de alguna curva que pasa por x_0 . Para ver esto, podemos tomar $z \in X$ tal que $DF(x_0)(z) = 1$ e identificar $X = \ker(DF(x_0)) \oplus \langle z \rangle$ con $\ker(DF(x_0)) \times \mathbb{R}$. De esta forma, si escribimos $x_0 = w_0 + s_0 z$ tenemos que $F(w_0, s_0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial s}(w_0, s_0)(t) = DF(x_0)(tz) = t$, es decir, $\frac{\partial F}{\partial s}(w_0, s_0)$ es un isomorfismo (la mismísima identidad). Por el teorema de la función implícita, los puntos de S cercanos a x_0 son de la forma $w + s(w)z$, donde s es una función de clase C^1 definida en un entorno de w_0 con $s(w_0) = s_0$.

Esto permite definir la curva que todos estábamos esperando:

$$c(t) := w_0 + tv + s(w_0 + tv)z.$$

La idea geométrica es bastante clara: nos movemos en $\ker(DF(x_0))$ en línea recta en la dirección dada por v y levantamos esta recta al gráfico de la superficie. Se cumple obviamente que $c(0) = w_0 + s(w_0)z = x_0$ y, además

$$c'(0) = v + Ds(w_0)(v)z = v,$$

ya que

$$Ds(w_0)(v) = -\frac{\partial F}{\partial w}(w_0, s_0)(v) = DF(w_0, s_0)(v, 0) = DF(x_0)(v) = 0.$$

Observación: en particular, si 0 es un valor regular de F se dice que S es una (hiper)superficie regular. Por ejemplo, si H es un espacio de Hilbert, la esfera $S_1 := \{x \in H : \|x\| = 1\}$ es una hipersuperficie regular, ya que la función $F(x) = \|x\|^2 - 1$ es diferenciable y su espacio tangente en x es $\langle x \rangle^\perp$, ya que $DF(x)(v) = 2\langle x, v \rangle$. Más en general, dado un espacio X de Banach, $T : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal, continua, simétrica, definida positiva y $F(x) := T(x, x)$ la forma cuadrática asociada, entonces $F^{-1}(1)$ es una hipersuperficie regular. ¿Cuál es su espacio tangente en un punto x ?

A partir de las anteriores observaciones se obtiene el teorema de los multiplicadores de Lagrange

Proposición 1.1 Sean $I, J : A \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 y x_0 un extremo de I ligado a la condición $J = 0$. Si $DJ(x_0)$ es suryectiva, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $DI(x_0) = \lambda DJ(x_0)$.

Demostración: Dado $v \in \ker(DJ(x_0))$, podemos tomar como antes una curva $c : (-\delta, \delta) \rightarrow S := \{J = 0\}$ tal que $c(0) = x_0$ y $c'(0) = v$. Como $I|_S$ tiene un extremo en x_0 , resulta $(I \circ c)'(0) = 0$, es decir, $DI(x_0)(v) = 0$. En otras palabras, $\ker DJ(x_0) \subset \ker DI(x_0)$, de donde se deduce el resultado. Para el que no esté muy convencido, podemos otra vez tomar z tal que $DJ(x_0)(z) = 1$; luego, dado $y \in X$ escribimos $y = v + sz$ y vale

$$DI(x_0)(y) = DI(x_0)(v + sz) = sDI(z) = \lambda DJ(x_0)(y),$$

donde $\lambda = DI(z)$. □

Para el problema isoperimétrico, podemos pensar en una curva cerrada parametrizada $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $u(t) = (x(t), y(t))$. Si suponemos que u es suave (para lo cual conviene elegir bien el buel), entonces el área de la región se calcula, de acuerdo al teorema de Green, por medio de la integral

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 [x'(t)y(t) - x(t)y'(t)] dt.$$

Por otra parte, la longitud es una constante L , así que podemos tomar

$$J(u) = \int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt - L.$$

Un simple cálculo muestra que

$$DI(u)(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \int_0^1 [\varphi'(t)y(t) - \varphi(t)y'(t) + x'(t)\psi(t) - x(t)\psi'(t)] dt$$

$$DJ(u)(\varphi, \psi) = \int_0^1 \frac{x'(t)\varphi'(t) + y'(t)\psi'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} dt.$$

A partir de la igualdad $DI(u)(\varphi, \psi) = \lambda DJ(u)(\varphi, \psi)$ para todas las curvas cerradas (φ, ψ) , integrando por partes se obtiene:¹

$$\left(\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)' = cy'(t)$$

$$\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right)' = -cx'(t)$$

para cierta constante c . De aquí se deduce

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = cy(t) + A$$

¹Por supuesto, se usa también la densidad de $C[0, 1]$ en $L^2(0, 1)$, es decir: si $\int_0^1 v(t)\varphi(t) dt = 0$ para toda $\varphi \in C[0, 1]$, entonces $v = 0$.

$$\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = -cx(t) + B$$

para ciertas constantes A, B y, en consecuencia:

$$(-cx(t) + B)^2 + (cy(t) + A)^2 = 1.$$

Se ve entonces que u describe una circunferencia, que podemos suponer centrada en 0, es decir: $A = B = 0$. Es claro ahora que $u = a(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ resuelve el sistema anterior, donde a está elegida para que $J(u) = 0$, es decir, $a = \frac{L}{2\pi}$. En este punto debemos decir que, hasta ahora, lo único que probamos es que esta solución es un punto crítico. Pero se puede demostrar, ante la mirada consternada de Jarbas, que se trata de un máximo.

2 El jardín de soluciones que se bifurcan

A modo de conclusión de nuestro pequeño paseo implícito, vamos a mencionar otro problema clásico en el análisis no lineal: el estudio de bifurcaciones. En un contexto abstracto, la idea es la siguiente: dados X, Y espacios de Banach y una función $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow Y$ de clase C^1 , nos interesa analizar la ecuación

$$F(\lambda, u) = 0.$$

Supondremos que para todo λ vale $F(\lambda, 0) = 0$, es decir, el par $(\lambda, 0)$ es siempre solución, llamada *solución trivial*. Se considera entonces el conjunto de soluciones no triviales

$$\Sigma := \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : F(\lambda, u) = 0, u \neq 0\}.$$

Los puntos de bifurcación son aquellos valores λ^* tales que $(\lambda^*, 0)$ se encuentra en la clausura de Σ , es decir, tales que existe una sucesión de soluciones no triviales $(\lambda_n, u_n) \rightarrow (\lambda^*, 0)$. Por ejemplo, para la ecuación

$$u''(t) + \lambda \sin u(t) = 0$$

en donde, para variar un poco, volvemos a las condiciones de Dirichlet $u(0) = u(T) = 0$, Es claro que 0 es solución para todo λ . Pero, además, si $|\lambda|$ es chico entonces no hay soluciones no triviales cerca del origen. Esto se ve fácilmente recurriendo a nuestro viejo y querido shooting: si definimos $S(y) = u(T)$, donde u es la solución del problema con condición inicial $u(0) = 0, u'(0) = y$, entonces escribiendo $w = \frac{\partial u}{\partial y}$ resulta

$$w''(t) + \lambda \cos u(t)w(t) = 0, \quad w(0) = 0, w'(0) = 1$$

y es fácil ver que si $|\lambda|$ es chico entonces $w(T) > 0$.² En otras palabras, $S'(y) > 0$, de modo que S se anula solamente en $y = 0$.

²Esto queda como ejercicio. A modo de ayuda, cabe recordar que, si bien las comparaciones son odiosas, el teorema de Sturm es bastante útil.

Pero algo nos hace sospechar que tiene que haber una razón más de fondo para llegar a la conclusión anterior: en efecto, si consideramos el espacio de Banach $X = \{u \in C^2[0, T] : u(0) = u(T) = 0\}$ con la norma usual, entonces la función $F(\lambda, u) := u'' + \lambda \operatorname{sen} u$ es de clase C^1 y además vale

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, u)(\varphi) = \varphi'' + \lambda \cos u \varphi,$$

lo que significa que $\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda, 0)$ es un isomorfismo siempre que el problema

$$\varphi'' + \lambda \varphi = 0, \quad \varphi(0) = \varphi(T) = 0$$

no tenga soluciones no triviales.³ Pero esto ya lo vimos: es el problema de autovalores para el que alguna vez calculamos la sucesión

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{T}\right)^2.$$

Esto quiere decir que la inexistencia de soluciones no triviales cerca del origen no se cumple solamente para $|\lambda|$ chico sino para todo $\lambda \neq \lambda_k$. ¿Por qué? Naturalmente, por el teorema de la función implícita: en efecto, para $\hat{\lambda} \neq \lambda_k$ existen $\delta > 0$, un entorno V del origen y una única función $u : (\hat{\lambda} - \delta, \hat{\lambda} + \delta) \rightarrow V$ tales que $u(\hat{\lambda}) = 0$ y $F(\lambda, u(\lambda)) = 0$. Pero en V siempre está la solución trivial, de modo que $u(\lambda) = 0$. Esto prueba que los únicos posibles puntos de bifurcación son los autovalores. Lo que ya no es tan fácil, aunque se puede probar en este caso, es que efectivamente lo son.

El argumento anterior vale para la situación general:

Proposición 2.1 *Si λ^* es un punto de bifurcación para el problema $F(\lambda, u) = 0$, entonces $\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda^*, 0)$ no es un isomorfismo.*

Un caso particular de cierta importancia es el problema $G(u) = \lambda u$, donde $G : X \rightarrow X$ es de clase C^1 tal que $G(0) = 0$. En este caso, formamos $F = \lambda I - G$ y resulta

$$\frac{\partial F}{\partial u}(\lambda^*, 0) = \lambda^* I - DG(0),$$

de donde la proposición anterior hace -por así decirlo- una mueca espectral:

$$\lambda^* \text{ es punto de bifurcación} \implies \lambda^* \in \operatorname{spec}(DG(0)).$$

Para quienes la caravana interminable de teoremas de análisis funcional se haya hundido en el olvido, cabe aclarar que con esta terminología no dijimos nada nuevo: el espectro de un operador lineal $T \in L(X, X)$ es justamente el conjunto de aquellos valores λ^* tales que $\lambda^* I - T$ no es inversible.

³Para que esto valga, hay que probar primero un resultado del tipo “unicidad implica existencia”, como vimos en la proposición de la clase previa.

Como ya dejamos entrever, la recíproca de la proposición anterior no vale; por eso en el ejemplo anterior aclaramos que no es tan fácil ver que los autovalores λ_k son puntos de bifurcación. Para convencernos de la dificultad en el caso general, vale este ejemplo elemental en $\mathbb{R}^2$: la función $F(\lambda, u) = \lambda u - T(u)$, donde $T(x, y) = (x + y^3, y - x^3)$. Es claro que $F(\lambda, 0) = 0$ solamente si $u = 0$, es decir, no hay puntos de bifurcación. Sin embargo $DT(0) = I$, que tiene el autovalor $\lambda^* = 1$.

3 Múltiples resonancias

La clase pasada vimos un ejemplo del método de averaging, que mediante el teorema de la función implícita permite encontrar soluciones periódicas de la ecuación $x'(t) = \varepsilon f(t, x(t), \varepsilon)$ cercanas a una solución constante para $\varepsilon = 0$. La idea central del método consiste en tomar promedio, para reducir el análisis a un problema en dimensión finita: específicamente, se define $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x, 0) dt$$

y se busca x_0 tal que $\phi(x_0) = 0$ y además $D\phi(x_0)$ sea inversible. Esto explica el nombre de *averaging* aunque, si nos ponemos a hilar más fino, tal vez un nombre más apropiado sería *projecting*. La explicación de esto es que si consideramos el operador lineal asociado $L : C_T^1 \rightarrow C_T$ dado por $Lx = x'$, entonces tomar promedio no es otra cosa que proyectar sobre el núcleo de L , entendiendo que se identifica $\mathbb{R}^n$ con el subespacio de funciones constantes. No está de más observar, por otra parte, que al calcular la imagen de L obtuvimos un resultado bastante sugestivo: el conjunto de funciones de promedio 0 que, bien mirado, se puede pensar como el complemento ortogonal de las constantes (en el sentido, claro está, del producto de L^2). Esto puede parecer una mera fanfarronada (¡vean! Acá sabemos trabajar en L^2); sin embargo, refleja un hecho bastante profundo: respecto de ese producto, el operador L es antisimétrico, en el sentido de que $\langle Lx, y \rangle = -\langle x, Ly \rangle$. Esto se debe, desde ya, a la integración por partes y el hecho de que estamos en un espacio de funciones periódicas. Pero entonces la imagen de L es necesariamente ortogonal al núcleo, pues si $y \in \ker(L)$ entonces la fórmula anterior nos dice que $\langle Lx, y \rangle = 0$ para todo x .⁴ Claro que esto no es suficiente para decir que cualquier función ortogonal al núcleo está en la imagen; para eso hizo falta emplear variación de parámetros para encontrar soluciones de manera directa.

Vamos a ver ahora un problema escalar, también muy conocido, pero que presenta un tipo diferente de resonancia: se trata de buscar soluciones 2π -periódicas al problema

$$u''(t) + n^2 u(t) = \varepsilon f(t, u(t), \varepsilon).$$

⁴Hay una pequeña trampa en el hecho de que, en realidad, el espacio de llegada y el de partida son diferentes, pero estamos ignorando la inclusión $i : C_T^1 \rightarrow C_T$.

El hecho de haber fijado $T = 2\pi$ es por comodidad, ya que la intención es que el valor n^2 sea justo un autovalor del operador $-u''$; de esta forma, si definimos $L : C_{2\pi}^2 \rightarrow C_{2\pi}$ dado por $Lu := u'' + nu^2$, vemos que el núcleo es no trivial, concretamente:

$$\ker(L) = \text{gen}\{\cos(nt), \text{sen}(nt)\}.$$

El problema se llama de resonancia en un autovalor múltiple porque, a diferencia del primero ($\lambda_0 = 0$, cuyo núcleo son las constantes), ahora la multiplicidad es 2. Por eso, el método de averaging se transforma en algo ligeramente distinto a promediar. Pero antes de ver esto, calculemos la imagen de L , ya advertidos de que (siempre respecto del producto de L^2) se trata ahora de un operador autoadjunto, pues

$$\begin{aligned} \langle Lu, v \rangle &= \int_0^{2\pi} [u''(t) + n^2u(t)]v(t) dt = \int_0^{2\pi} [-u'(t)v'(t) + n^2u(t)v(t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} [v''(t) + n^2v(t)]u(t) dt = \langle u, Lv \rangle. \end{aligned}$$

De esta manera, la imagen de L está contenida en el complemento ortogonal de $\ker(L)$, ignorando como antes la inclusión. Y, otra vez, el método de variación de parámetros muestra que vale la afirmación recíproca (y podemos cantarle a Fredholm: tu voz, vuelvo a escuchar tu voz). En efecto, si $\varphi \in C_{2\pi}$ es ortogonal a $\cos(nt)$ y $\text{sen}(nt)$, entonces la solución general del problema $u'' + n^2u = \varphi$ está dada por

$$u(t) = \left(\gamma_1 - \int_0^t \frac{\text{sen}(ns)}{n} \varphi(s) ds \right) \cos(nt) + \left(\gamma_2 + \int_0^t \frac{\cos(ns)}{n} \varphi(s) ds \right) \text{sen}(nt)$$

y ¡vaya cosa!, ni siquiera hace falta verificar a partir de esa formulota que u es 2π -periódica. Una manera elegante de ver esto es recurrir (¡ya era hora!) a la notación compleja: en vez de tantos senos y cosenos directamente emplearemos la función e^{int} . El hecho de que φ sea ortogonal a $\ker L$ nos dice que esta función u satisface

$$\int_0^{2\pi} (u''(t) + n^2u(t)) e^{int} dt = 0.$$

La diferencia con nuestras últimas integraciones por partes, es que todavía no sabemos de antemano que u es periódica, así que tenemos que poner, de manera obediente, todos los términos de borde:

$$u'(t)e^{int} \Big|_0^{2\pi} - inu(t)e^{int} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} n^2u(t)e^{int} dt + \int_0^{2\pi} n^2u(t)e^{int} dt = 0$$

y separando en parte real e imaginaria se deduce que $u'(t) \Big|_0^{2\pi} = u(t) \Big|_0^{2\pi} = 0$. Llega el momento de preguntarse para qué nos tomamos entonces el trabajo de escribir la fórmula de variación de parámetros, a lo que podemos responder: para verificar que la inversa a derecha que definiremos a continuación para L

resulta continua.⁵ Resulta cómodo, entre todas las posibles soluciones para una φ dada, considerar aquellas que también son ortogonales al núcleo de L aunque, ya advertidos, vemos que no hay necesidad de ponerse a calcular los valores de γ_1 y γ_2 : por ejemplo, alcanza con definir u_0 como aquella función que en la “formulota” anterior tiene $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, que claramente es continua respecto de φ , y luego restarle su proyección al núcleo, es decir: $K\varphi := u_0 - Pu_0$.

A todo esto, ¿en qué consiste esa proyección (obviamente, continua) al núcleo? Siempre pensando en el producto de L^2 , la idea más razonable es proyectar de manera ortogonal. Recordemos que si v es un elemento de una base ortonormal de cierto espacio, la coordenada correspondiente de cualquier vector x no es otra cosa que el producto $\langle x, v \rangle$. En nuestro caso, hay que tener en cuenta que la base que dimos de $\ker(L)$ no está normalizada, ya que

$$\int_0^T \cos^2(nt) dt = \int_0^T \sin^2(nt) dt = \pi.$$

Esto explica el hecho de que si para $\varphi \in C_T$ queremos definir

$$P\varphi := a(\varphi) \cos(nt) + b(\varphi) \sin(nt),$$

entonces los coeficientes (¿alguien dijo “Fourier”?) $a(\varphi)$ y $b(\varphi)$ deben ser

$$a(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos(nt) dt, \quad b(\varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin(nt) dt.$$

Una vez que tenemos el marco funcional apropiado, lo que sigue es muy similar al caso de la clase previa, lo que nos brinda una magnífica oportunidad para, esta vez sí, entender lo que estamos haciendo. En primer lugar, recordemos que gracias a nuestra fluyente inversa a derecha K , decir que $Lu = \varphi$ equivale a estas dos afirmaciones

$$P\varphi = 0 \quad u - Pu = K\varphi,$$

que -ya no es sorpresa- se pueden juntar en una sola:

$$u = Pu + P\varphi + K(\varphi - P\varphi).$$

Como antes, estamos ignorando la inclusión de C_T^2 en C_T : en realidad, hay dos P diferentes, una es la proyección en el dominio y otra en el codominio. Pero es claro que ambas se definen de la misma forma, así que podemos seguir de lo más tranquilos. Si llamamos $N_\varepsilon(u) = f(\cdot, u, \varepsilon)$, entonces el problema original se reescribe en la forma $F(u, \varepsilon) = 0$, donde

$$F(u, \varepsilon) = u - [Pu + PN_\varepsilon u + \varepsilon K(N_\varepsilon u - PN_\varepsilon u)].$$

⁵Esta respuesta se desvanece en un minuto, porque el conjunto ortogonal a $\ker L$ es cerrado y entonces se puede usar el teorema de la aplicación abierta, pero habíamos quedado en no usar teoremas de análisis funcional. Como sea, el lector rencoroso podrá observar que las mismas observaciones valen para la proposición que probamos en la última clase.

Y a esta altura se trata de “una que sabemos todos”: para $\varepsilon = 0$ se tiene

$$F(u, 0) = 0 \iff u \in \ker(L) \text{ y adem\u00e1s } PN_0(u) = 0,$$

lo que motiva la definici\u00f3n de $\phi : \ker(L) \rightarrow \ker(L)$ dada por

$$\phi(u) = PN_0(u).$$

Y esto que parece tan horrible, en realidad se identifica con una funci\u00f3n en $\mathbb{R}^2$, pensando directamente en sus coordenadas. O, mejor todav\u00eda, una funci\u00f3n compleja:

$$\phi(a + ib) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t, u(t), 0) e^{int} dt,$$

donde $u(t) = a \cos(nt) + b \sin(nt)$. Esto hace que la perspectiva de calcular su diferencial no sea tan alentadora, aunque ya nos movemos como peces en el agua de las abstracciones: vamos a demostrar un teorema an\u00e1logo al de la \u00faltima clase, esta vez sin calcular (\u00e9s una promesa!) ni una derivada.

Teorema 3.1 *En la situaci\u00f3n anterior, supongamos que para cierto $u_0 \in \ker(L)$ se verifica que $\phi(u_0) = 0$ y $D\phi(u_0)$ es inversible. Entonces existe $\delta > 0$, un entorno U de u_0 en C_T^2 y $u : (-\delta, \delta) \rightarrow U$ suave tal que $u(0) = u_0$ y $u(\varepsilon)$ es una (\u00fanica) soluci\u00f3n del problema en U .*

Demostraci\u00f3n: Como $F(u_0, 0) = 0$, por el teorema de la funci\u00f3n impl\u00edcita alcanza con probar que $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, 0)$ es un isomorfismo. Pero

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, 0)(\varphi) = \varphi - P\varphi - PDN_0(u_0)(\varphi),$$

de modo que la igualdad $\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, 0)(\varphi) = w$ equivale a

$$-PDN_0(u_0)(\varphi) = Pw, \quad \varphi - P\varphi = w - Pw.$$

Luego, nuestro problema se reduce a encontrar $v \in \ker(L)$ tal que

$$-PDN_0(u_0)(v) = Pw + PDN_0(u_0)(w - Pw)$$

y luego la soluci\u00f3n que buscamos es $\varphi = w - Pw + v$. El detalle es que sobre $\ker(L)$ vale $F(\cdot, 0) = -\phi$, de modo que

$$-PDN_0(u_0)(v) = \frac{\partial F}{\partial u}(u_0, 0)(v) = -D\phi(u_0)(v).$$

De esta forma, el v que buscamos es

$$v = -D\phi(u_0)^{-1}[P(w + DN_0(u_0)(w - Pw))],$$

que podr\u00e1 ser muy fea pero al menos es continua respecto de w . En otras palabras, la funci\u00f3n $w \mapsto \varphi$ est\u00e1 bien definida y es continua. $\square$